XII. GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Środek odcinka AB o współrzędnych $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$:

$$S_{AB}=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

2. Długość odcinka AB o współrzędnych $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

3. Przekształcenia geometryczne (symetrie):

a) Symetria osiowa SOx względem osi Ox przekształca punkt $P=(x, y)$ na punkt $P'=(x, -y)$.

b) Symetria osiowa SOy względem osi Oy przekształca punkt $P=(x, y)$ na punkt $P'=(-x, y)$.

c) Symetria środkowa względem punktu $K=(a, b)$ przekształca punkt $P=(x, y)$ na punkt $P'=(2a-x, 2b-y)$.

d) W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P=(x, y)$ na punkt $P'=(-x, -y)$.

4. Równanie prostej z dwóch punktów, np.:

prosta AB z punktów $A=(3, 4)$, $B=(5, 6)$

tworzymy układ równań, wstawiamy punkt A i B do równania kierunkowego prostej: $y=ax+b$

$$\begin{cases} 4=3a+b \\ 6=5a+b \end{cases}$$

po odjęciu stronami otrzymujemy współczynnik kierunkowy a, ewentualnie doliczamy b.

[można też użyć wzoru z tablic lub wzoru na współczynnik kierunkowy $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$]

5. Punkt przecięcia dwóch prostych, np.:

punkt przecięcia prostych $y=3x+4$ i $y=5x+6$

tworzymy układ równań z tych prostych lub przyrównujemy wzory prostych:

$$\begin{cases} y=3x+4 \\ y=5x+6 \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad 3x+4=5x+6$$

6. Prosta równoległa do danej przechodząca przez dany punkt, np.:

równoległa do $y=3x+4$ przechodząca przez punkt $(5, 6)$

tworzymy prostą równoległą do danej $(a_1=a_2)$ [ten sam współczynnik kierunkowy]:

$y=3x+b$

wstawiamy punkt $(5, 6)$:

$6=3\cdot 5+b$ *i obliczamy* b.

7. Prosta prostopadła do danej przechodząca przez dany punkt, np.:

Prostopadła do $y = 3x + 4$ przechodząca przez punkt $(5, 6)$

tworzymy prostą prostopadłą do danej $(a_1 \cdot a_2 = -1)$ *[czyli ujemną odwrotność wsp.kier.* $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ *]:*

$y = -\frac{1}{3}x + b$

wstawiamy punkt $(5, 6)$:

$6 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + b$ *i obliczamy* b.

8. Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ZADANIA:

1. Dany jest odcinek AB o końcach: $A = (-4, 2)$ i $B = (6, 4)$. Znajdź:

a) długość odcinka AB

b) środek odcinka AB

c) równanie prostej zawierającej odcinek AB

d) równanie prostej będącej symetralną odcinka AB

2. Punkt $A = (3, -7)$ jest końcem odcinka AB, którego środek ma współrzędne $S = (-3, 13)$. Znajdź współrzędne punktu B.

3. Znajdź współrzędne punktu, który jest obrazem punktu $A = (-1, 5)$

   a) w symetrii osiowej względem osi OX

   b) w symetrii osiowej względem osi OY

   c) w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych

   d) w symetrii środkowej o środku $S = (4, -1)$

4. Dany jest trójkąt o współrzędnych wierzchołków: $A=(-3,0)$, $B=(1,3)$, $C=(-1,4)$. Wyznacz:

   a) równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C

   b) równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka C

5. Dany jest kwadrat o kolejnych wierzchołkach $A=(1,-5)$, $B=(9,-1)$, $C=(5,7)$. Wyznacz wierzchołek D.

6. Zapisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt S, a promień ma długość r, jeżeli:

a) $S=(7,3)$, $r=5$

b) $S=(2,-1)$, $r=2$

c) $S=(0,0)$, $r=\sqrt{3}$

7. Podaj współrzędne środka i długość promienia okręgu o podanym równaniu. Sprawdź czy punkt o współrzędnych $(-2, 0)$ należy do tego okręgu.

a) $x^2+y^2=4$

b) $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

c) $(x-4)^2+(y+1)^2=5$

8. Podaj równanie okręgu symetrycznego do okręgu o równaniu $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ względem:

a) osi Ox

b) osi Oy

c) początku układu współrzędnych

9. Dany jest kwadrat o przeciwległych wierzchołkach $A=(3,1)$, $C=(-1,3)$. Oblicz pole kwadratu i wyznacz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.